c) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

h est strictement décroissante sur IR
d'où : $h(IR) =]\lim_{x \to +\infty} h(x), \lim_{x \to -\infty} h(x)[$

$=]0, +\infty[$

d'où : $h(x) > 0$; $\forall x \in IR$

2) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x)$
D'où f ′ et h sont de même signe.

3) $* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$

On pose : $X = e^{-2x}$ alors $\lim_{X \to 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = 1$

$* f(x) = e^{2x}.\ Ln[e^{-2x}(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.[Lne^{-2x} + Ln(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.[-2x + Ln(1 + e^{2x})]$

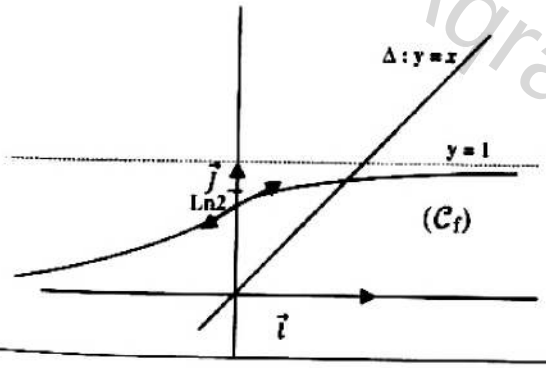
$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$
$= \lim_{x \to -\infty} (-2xe^{2x} + e^{2x}Ln(1 + e^{2x})) = 0$

4) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

5) T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

T : $y = (2Ln2 - 1)x + Ln2$



Partie C

1) $u(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Une primitive de u sur IR est :
$U(x) = \frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})$

2) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f(x)dx$
$= \int_{-1}^{0} e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})dx$

$e^{2x} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}e^{2x}$

$Ln(1 + e^{-2x}) \xrightarrow{d} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$\mathcal{A} =$
$[\frac{1}{2}e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^{-2x}}dx$
$= \frac{Ln2}{2} - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) + \left[\frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})\right]_{-1}^{0}$

$= Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$ u.a

$\mathcal{A} = 25[Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$ cm^2

$\mathcal{A} =$ …calculatrice

Partie D

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) f est continue et strictement croissante sur [0,1] d'où :
$f([0,1]) = [f(0), f(1)]$
$= [Ln2, e^2Ln(1 + e^{-2})]$

$Ln2 \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ d'où :
$f([0,1]) \subset [0,1]$
* Démonstration par récurrence

* $U_0 = 0 \in [0,1]$ (vrai)

* supposons que : $U_n \in [0,1]$
montrons que : $U_{n+1} \in [0,1]$
$U_n \in [0,1] \Rightarrow f(U_n) \in f([0,1])$
$\Rightarrow f(U_n) \in [0,1]$
$\Rightarrow U_{n+1} \in [0,1]$

Qarray.tn - Agra Blein Qarray.tn